

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $\overset{1}{C}$ mit $-356-$

$$\boxed{f'(x) \neq 0}$$

Es gilt: $\text{Bild}(f) = [c, d]$

Fall 1: $f' > 0 \implies c = f(a), d = f(b)$

Ist $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt:

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy = \int_{[f(a), f(b)]} g d\mathcal{L}^1$$

$$\overset{\text{Satz 25.12}}{=} \int_{[a, b]} g \circ f f' d\mathcal{L}^1$$

$$= \int_a^b g(f(x)) f'(x) dx$$

Fall 2 : $f' < 0 \Rightarrow [c, d] = [f(b), f(a)]$

Für stetiges $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ folgt

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy = - \int_{f(b)}^{f(a)} g(y) dy =$$

$$= - \int_{[a, b]} g \circ f \cdot \underbrace{|f'|}_{= "|\det Df|"} d\mathcal{L}^1$$

$$= \int_{[a, b]} g \circ f \cdot f' d\mathcal{L}^1$$

$$= \int_a^b g(f(x)) f'(x) dx$$

von Satz 25.12 $\square$

② Verallgemeinerungen ($\rightarrow$ vgl. Federer)

I. Ist $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, U offen

in $\mathbb{R}^n$, eine injektive C^1 - -358-

Funktion, so gilt Satz 25.12

Weiterhin (also Φ nicht unbedingt
"Diffeomorphismus")

II. Was passiert, wenn Φ lediglich
 C^1 ist? (nicht mehr not-
wendig injektiv)

(i) Für $A \in \mathcal{U}$ $\mathbb{R}^n$ -messbar ist
 $\Phi(A)$ auch noch messbar. Es gilt
weiter

$$\int_A |\det D\Phi| d\mathbb{R}^n =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} V(\Phi, A)(y) d\mathcal{L}^n(y)$$

mit der Vielfachheitenfunktion

$$V(\Phi, A)(y) := \# \{x \in A : \Phi(x) = y\}$$

(ii) Für $A \subset \mathcal{U}$ $\mathcal{L}^n$ -messbar
und $\mathcal{L}^n$ -integrierbare $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$
ist

$$\int_A g \circ \Phi |\det D\Phi| d\mathcal{L}^n =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} V(\Phi, A) g d\mathcal{L}^n.$$

③ Sei $f: [0, \infty) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{L}^1$ -integrierbar.

Dann gilt:

$$\int_{r \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq R} f(\sqrt{x^2+y^2}) d\mathcal{L}^2(x,y) =$$

$$2\pi \int_{[r,R]} f(t) \cdot t d\mathcal{L}^1(t) =$$

$$2\pi \int_r^R f(t) t dt, \quad 0 \leq r < R < \infty$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen besteht, wenn f auf jedem Intervall

$[r,R]$ eine Regelfunktion ist.

Beweis: Sei $\Phi(r,\vartheta) = (r \cdot \cos \vartheta, r \cdot \sin \vartheta)$ (Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$)

$$\Rightarrow \int_{\{(x,y): r \leq |(x,y)| \leq R\}} f(\sqrt{x^2+y^2}) d\mathcal{L}^2(x,y) =$$

$$\int_{\Phi([r,R] \times [0,2\pi])} \dots = \int_{[r,R] \times [0,2\pi]} f(\Phi(\varrho,\vartheta)) |det D\Phi| d\mathcal{L}^2(\varrho,\vartheta)$$

$$= \int_{[r,R] \times [0,2\pi]} f(\varrho) \cdot \varrho d\mathcal{L}^2(\varrho,\vartheta)$$

$$\stackrel{\text{Fubini}}{=} 2\pi \int_{[r,R]} f(\varrho) \varrho d\mathcal{L}^1(\varrho)$$

Damit läßt sich zeigen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

denn: $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} d\mathcal{L}^2(x,y) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2} d\mathcal{L}^1(x) \right) d\mathcal{L}^1(y)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} d\mathcal{L}^1(x) \right) d\mathcal{L}^1(y) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} d\mathcal{L}^1(t) \right)^2 \stackrel{\text{Begründung!}}{=} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right)^2$$

Andererseits $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} d\mathcal{L}^2(x,y) \stackrel{\text{Formel v. vorher}}{=} 2\pi \int_0^{\infty} \rho e^{-\rho^2} d\rho$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \frac{d}{d\rho} e^{-\rho^2} \right) d\rho = \pi$$

$$\Rightarrow \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right)^2 = \pi$$

□

weitere Anwendung der Transf. Regel für $\mathcal{L}^n$.

④ Räumliche Polarkoordinaten

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) := (r \cos \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

$$\text{auf } (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Φ ist ein Diffeomorphismus mit Bild $\Phi = \mathbb{R}^3 - (-\infty, 0] \times \{0\} \times \mathbb{R}$,

$$|\det D\Phi| = \rho^2 \cos \varphi$$

$\mathbb{R}^3$ -Nullmenge

Volumen der Kugel um $(0,0,0)$ mit Radius $R =$

Transf. Formel

$$\mathcal{L}^3(B_R) = \int_{(0,R) \times (0,2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} \rho^2 \cos \varphi \, d\mathcal{L}^3(\rho, \varphi, \psi)$$

Fubini

$$= 2\pi \left(\int_0^R \rho^2 d\rho \right) \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi \right) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Wie in ③ kann man sich überlegen

$$\int_{r \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq R} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \, d\mathcal{L}^3(x,y,z) = 4\pi \int_r^R \rho^2 f(\rho) \, d\rho,$$

und im $\mathbb{R}^n$ gilt:

Volumen von $B_1^{(n)}$

$$\int_{r \leq |x| \leq R} f(|x|) \, d\mathcal{L}^n(x) = n \cdot \omega_n \int_r^R \rho^{n-1} f(\rho) \, d\rho$$

für $\mathcal{L}^1$ -integrierbare $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ (genauer: f Regelfunktion

auf jedem Intervall $[r, R]$). Für die letzte Formel muß man

Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^n$ einführen.

Hausdorff-Maße $\mathcal{H}^n$ auf $\mathbb{R}^n$, $n \geq 0$

→ wie misst man z.B.

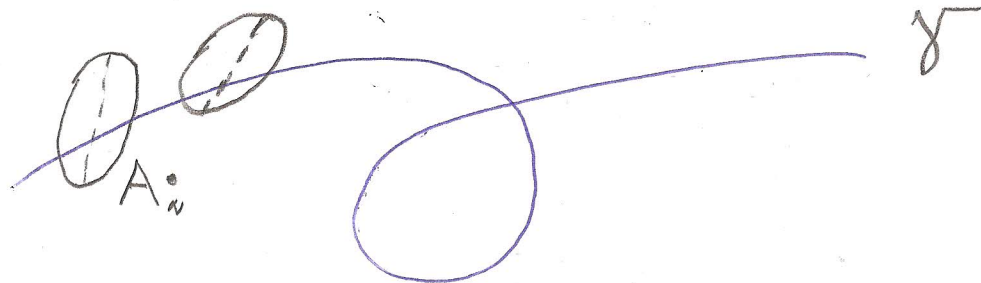
$\left. \begin{array}{l} \text{Längen von Kurven,} \\ \text{Inhalte von Flächen} \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^3$

in geometrischer Weise?

→ $\mathcal{L}^3$ ergibt stets 0

Motivation

1.) Kurvenlänge in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$



Vorgabe von $\delta > 0$,

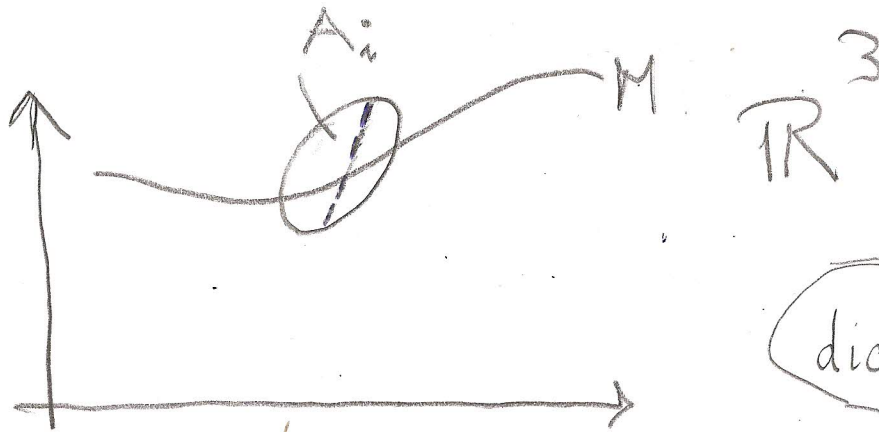
$$\gamma \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad \text{diam}(A_i) \leq \delta$$

bilde $\inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam } A_i : \dots \right\},$

dann $\delta \downarrow 0$

Ergebnis : $\mathcal{H}^1(\gamma)$

2.) Flächeninhalte in $\mathbb{R}^3$ ($M = 2D - M \perp \mathbb{R}^3$)



$$\text{diam}(A_i) \leq \delta$$

Flächeninhalt von M in $A_i \approx$
 " Kreisscheibe mit Radius $\frac{\text{diam } A_i}{2}$

bilde $\inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\omega_2}_{\pi} \left(\frac{\text{diam } A_i}{2} \right)^2 : \dots \right\}$

dann $\delta \downarrow 0$

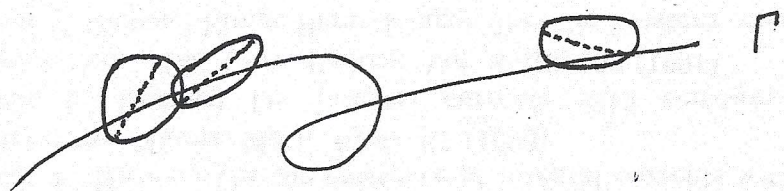
Ergebnis : $\mathcal{H}^2(M)$

→ geom. vernünftige Messung (Länge, Oberfläche, etc.)
von n-uberdim. Teilmengen $M \subset \mathbb{R}^n$

$\mathcal{L}^n$ mißt nur "Volumina", d.h. $\mathcal{L}^n(M) = 0$

für M n-uberdim.

Beispiel: 1) $n = 2$, $\Gamma =$ Kurve, Länge von $\Gamma = ?$



Idee: gebe eine Schranke $\delta \in (0, \infty]$ vor; überdecke

$$\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad \text{diam } A_i \leq \delta, \quad A_i \subset \mathbb{R}^2$$

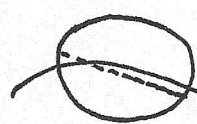
im Bild deuten die unterbrochenen Linien den Durchmesser an

bilde $\inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam } A_i : \Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \text{diam } A_i \leq \delta \right\}$

und dann Limes $\delta \downarrow 0$

Ergebnis: $\mathcal{H}^1(\Gamma) =$ 1-dim. Hausdorff Maß von Γ

2) $n = 3$, $M =$ Fläche (2 Mfkt.)



M

mit Mengen $A_i \subset \mathbb{R}^3$ wobei

überdecke wie oben

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad \text{diam } A_i \leq \delta$$

Wie groß ist der Flächenanteil von M in A_i ?

$$\approx \omega_2 \cdot \left(\frac{\text{diam } A_i}{2} \right)^2, \quad \omega_2^* = \text{Fläche der 1-Kreisscheibe}$$

↑
ersetze $M \cap A_i$ näherungsweise durch eine Kreisscheibe mit dem Radius $\frac{1}{2} \text{diam } A_i$

$$\text{dann: } \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \omega_2 \left(\frac{\text{diam } A_i}{2} \right)^2 : \dots \right\} \quad \text{und } \delta \downarrow 0$$

Ergebnis: $\mathcal{H}^2(M) = 2\text{-dim Hausdorff-Maß von } M$

← weiter in der Def 25.5

allgemein

Def 25.5 : $\rho\text{-dim Hausdorff-Maß auf } \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq \rho \leq \infty$

Sei $\omega_\rho := \begin{cases} \text{Volumen des } \rho\text{-dim. 1-Kugel in } \mathbb{R}^\rho, & \rho \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$ (oder irgendwas > 0)

$$\mathcal{H}^\rho(A) := \lim_{\delta \downarrow 0} \left[\inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \omega_\rho \left(\frac{\text{diam } A_i}{2} \right)^\rho : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \text{diam } A_i \leq \delta \right\} \right]$$

für $A \subset \mathbb{R}^n$

Eigenschaften: (der Maße $\mathcal{H}^s$ auf $\mathbb{R}^n$) -365-~~1111~~

i) $\mathcal{H}^s$ Borel-Maß auf $\mathbb{R}^n$

ii) $\mathcal{H}^0 = \text{Zählmaß}$, $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$,

$\mathcal{H}^s \equiv 0$ für $s > n$

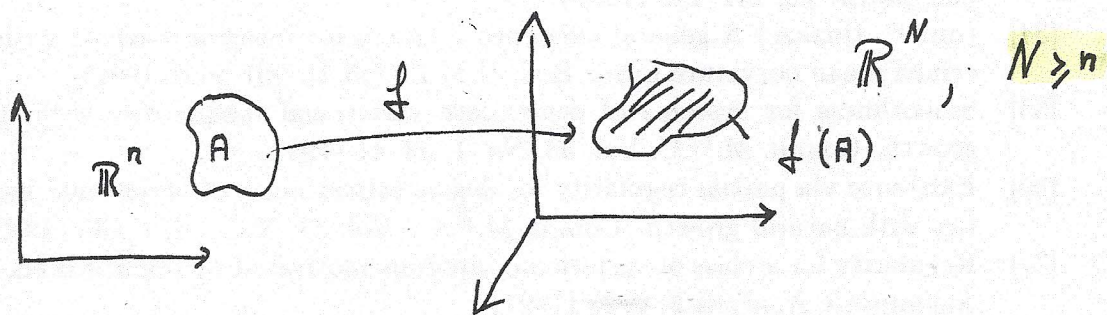
iii) $\mathcal{H}^s$ homogen vom Grad s und Isometrie invariant

iv) $\mathcal{H}^s(A) < \infty \implies \mathcal{H}^t(A) = 0 \quad \forall t > s$

v) $\mathcal{H}^s(A) > 0 \implies \mathcal{H}^t(A) = \infty \quad \forall t < s$

vi) A beschränkt $\subset$ l -dim. Unterraum von $\mathbb{R}^n$
 $\implies \mathcal{H}^l(A) < \infty$

Wie berechnet man Hausdorff-Maße? $\rightarrow$ Flächenformel



$$\mathcal{H}^n(f(A)) = ?$$

z.B.: $n=1$, A Intervall, $N=3$

$$\mathcal{H}^1(f(A)) = \text{Kurvenerlänge}$$

Dazu ein Lemma.

⑨ Für $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\mathcal{H}^n(A) < \infty \implies \mathcal{H}^t(A) = 0 \text{ für alle } t > n$$

$$\mathcal{H}^n(A) > 0 \implies \mathcal{H}^t(A) = \infty \text{ für alle } t < n$$

⑩ $A \subset l$ -dim. Hyperebene, A beschränkt $\implies$

$$\mathcal{H}^l(A) < \infty$$

⑪ U offen $\subset \mathbb{R}^m$, $m < n$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulär $\implies$

$$\mathcal{H}^m(f(K)) < \infty \quad \forall K, \text{ kompakt } \subset U$$

Bem.: ⑨ - ⑪ zeigen, daß $\mathcal{H}^l$ das richtige Maß zur Messung

l -dim. Mengen in $\mathbb{R}^n$ ist.

~~18.12.1985~~

~~Wiederholung~~

z.B. $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

LEMMA: Sei $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ linear mit $n \leq N$. Sei

$$[L] := \det(L^T \cdot L)^{1/2}$$

(genannt die Jacobische von L) Dann gilt für $A \subset \mathbb{R}^n$:

$$\mathcal{H}^n(L(A)) = [L] \cdot \mathcal{L}^n(A).$$

"Lineare Algebra": $[L] = \sqrt{\text{Summe der Quadrate aller } n \times n \text{ Unterdet. von } L}$



Beweis des Lemmas:

-367-

$$L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad n < N \quad \left(\text{für } n=N: \text{ Aussage über } \mathcal{L}^n! \right)$$

1. Fall: $\text{Rang } L < n$

$L(A)$ ist enthalten in einem Unterraum der Dim $< n$

$$\Rightarrow \mathcal{H}^n(L(A)) = 0$$

und auch $\det(L^T \circ L) = 0$, da $\text{Rang}(L^T \circ L) < n$

2. Fall: $\text{Rang } L = n$

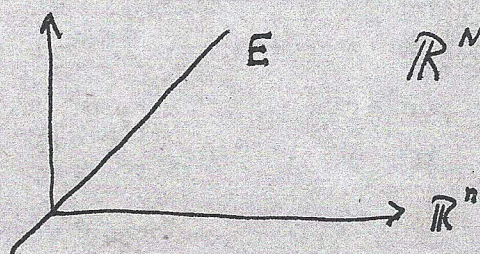
$E := \text{Bild } L$ ist n -dim U.R. von $\mathbb{R}^N$

wähle $T: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ orthogonal mit $T(E) = \mathbb{R}^n (= \mathbb{R}^n \times \{0\})$

$$\Rightarrow \mathcal{H}^n(L(A)) \stackrel{\text{Isom. invarianz von } \mathcal{H}^n}{=} \mathcal{H}^n(T \circ L(A))$$

$$\mathcal{H}^n(\underbrace{T \circ L(A)}_{\subset \mathbb{R}^n}) =$$

$$\mathcal{L}^n(T \circ L(A)) = |\det(T \circ L)| \cdot \mathcal{L}^n(A)$$



es gilt:

$$(\det T \circ L)^2 = \det \{(T \circ L)^t \circ T \circ L\} =$$

$$\det(L^t \circ T^{-1} \circ T \circ L) = \det(L^t \circ L) \Rightarrow$$

$$|\det T \circ L| = \sqrt{\det(L^t \circ L)}$$